

28/05/19

Θέμα 4 [15/06/18] :

Δίνονται τα σημεία  $A(1,0,1)$ ,  $B(0,1,0)$  και το επίπεδο  $x-y+z-1=0$  :

α. Νδο η ευθεία (ε) που ορίζεται από τα  $A$  και  $B$  τέμνει το (π)

β. Νβρ η σφαίρα (ε) με διάμετρο το τμήμα  $AB$

γ. Νδο η (ε) τέμνει το επίπεδο (π) σε κύκλο (ς)

δ. Νβρ η ακτίνα και το κέντρο του κύκλου (ς).

Λύση :

α. Η ευθεία που διέρχεται από τα  $A$  και  $B$  είναι :

$$\begin{aligned} E(t) &= \vec{OA} + t \vec{AB} \\ &= (1,0,1) + t(-1,1,-1) \\ &= (1-t, t, 1-t) \end{aligned}$$

Για να τέμνει η ευθεία το επίπεδο θα πρέπει :

$$(1-t) - t + (1-t) - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$1 - 3t = 0 \Rightarrow$$

$$t = 1/3$$

Το σημείο τομής είναι :  $Q(1 - \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1 - \frac{1}{3}) \Rightarrow$

$$Q(2/3, 1/3, 2/3)$$

β. Η (ς) έχει κέντρο το σημείο  $K$

$$\text{με } \vec{OK} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB})$$

$$K = (1/2, 1/2, 1/2)$$

$$R = \frac{1}{2} |\vec{AB}| = \frac{\sqrt{3}}{2}$$





As υπολογίζουμε την απόσταση του  $K$  από το  $(\pi)$

$$d(K, \pi) = \frac{|\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} < \frac{\sqrt{3}}{2} = R$$

Άρα η σφαίρα τέμνει το επίπεδο  $(\pi)$  σε κύκλο  $(c)$

δ. Θα υπολογίσουμε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου  $(c)$

• Υπολογισμός κέντρου  $K'$ :

Θα βρούμε την ευθεία που διέρχεται από το  $K$  και τέμνει κάθετα το  $(\pi)$ . Το σημείο τομής θα είναι το  $K'$ .

$$\ell(t) = \vec{OK} + t\vec{n} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + t(1, -1, 1) \Rightarrow$$

$$\ell(t) = \left(\frac{1}{2} + t, \frac{1}{2} - t, \frac{1}{2} + t\right)$$

Για να τέμνει η  $\ell$  το επίπεδο πρέπει:

$$\left(\frac{1}{2} + t\right) - \left(\frac{1}{2} - t\right) + \left(\frac{1}{2} + t\right) = 1 \Rightarrow 3t = \frac{1}{2} \Rightarrow t = \frac{1}{6}$$

$$\text{Άρα } K' \left( \frac{3}{3 \cdot 2} + \frac{1}{6}, \frac{3}{3 \cdot 2} - \frac{1}{6}, \frac{3}{3 \cdot 2} + \frac{1}{6} \right) \Rightarrow$$

$$K \left( \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right)$$

Από Πυθαγόρεια Θεώρημα :

$$R' = \sqrt{R^2 - \|K\|^2} = \sqrt{R^2 - d^2(K, n)} = \sqrt{\frac{3}{4} - \frac{1}{12}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

## Θέματα [Σεπτέμβριος 2018] :

### Θέμα 1 :

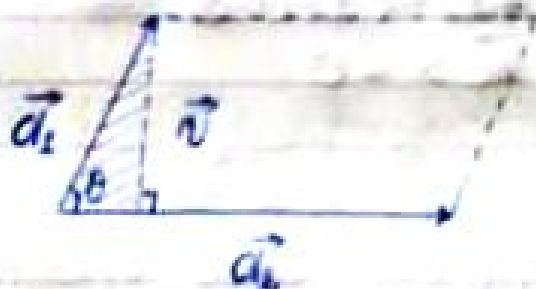
Θεωρούμε τα διανύσματα  $\vec{a}_1, \vec{a}_2$  του  $\mathbb{R}^3$

α. Νόε ο αριθμός  $\|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2\|$  εκφράζει το εμβαδόν του παραλληλογράμμου με πλευρές παράλληλες προς  $\vec{a}_1, \vec{a}_2$

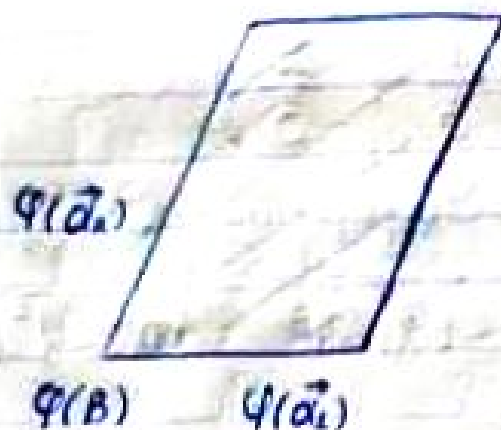
β. Έστω  $B$  παραλληλόγραμμο και  $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  ισομετρία. Νόε  $B$  και  $\varphi(B)$  έχουν ίδιο εμβαδόν.

Λύση :

α. Έστω παραλληλόγραμμο με πλευρές παράλληλες προς  $\vec{a}_1$  και  $\vec{a}_2$



$$\begin{aligned} \text{Εμβ} &= \|\vec{a}_2\| \cdot \|\vec{v}\| \\ &= \|\vec{a}_2\| \cdot \|\vec{a}_1\| \sin \theta \\ &= \|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2\| \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\| \varphi(\vec{a}_1) \times \varphi(\vec{a}_2) \|^2 &= \| \varphi(\vec{a}_1) \|^2 \| \varphi(\vec{a}_2) \|^2 - \langle \varphi(\vec{a}_1), \varphi(\vec{a}_2) \rangle^2 \\ &= \| \vec{a}_1 \|^2 \| \vec{a}_2 \|^2 - \langle \vec{a}_1, \vec{a}_2 \rangle^2 \\ &= \| \vec{a}_1 \times \vec{a}_2 \|^2\end{aligned}$$

## Θέμα 2 :

Δίνονται τα σημεία :  $A(1, 1, 1)$ ,  $B(-1, 1, 2)$ ,  $C(2, 1, 3)$  και  $D(1, 1, 2)$

α. Νόο  $A, B, C, D$  είναι συνεπίεδα

β. Νόο ο κύκλος που διέρχεται από τα  $A, B, C$

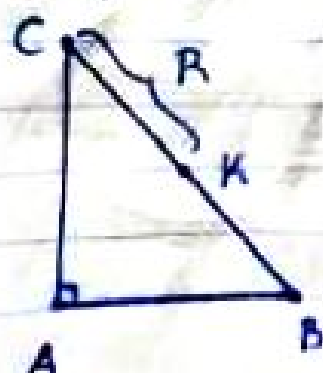
Λύση :

α. Τα σημεία  $A, B, C, D$  βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο  $y=1$ .

β. Έχουμε :  $\vec{AB} = (-2, 0, 1)$ ,  $\vec{AC} = (1, 0, 2)$

Παρατηρούμε ότι :  $\langle \vec{AB}, \vec{AC} \rangle = 0$

Άρα  $\vec{AB} \perp \vec{AC}$



Επειδή το τρίγωνο είναι ορθογώνιο  
το  $\vec{OK} = \frac{1}{2} (\vec{OB} + \vec{OC}) = (\frac{1}{2}, 1, \frac{5}{2})$

Η ακτίνα είναι:  $R = \|KC\| = \frac{\sqrt{10}}{2}$

Άρα η εξίσωση του κύκλου είναι:

$$\begin{cases} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y-1)^2 + \left(z - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{10}{4} \\ y=1 \end{cases}$$

### Θέμα 3 :

Θεωρούμε τις σφαίρες  $(S_1)$  και  $(S_2)$  με αλγεβρικές εξισώσεις:

$$(S_1): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 2z = 0$$

$$(S_2): x^2 + y^2 + z^2 - 6y + 6z + 17 = 0$$

α. Νόρ τα κέντρα και οι ακτίνες

β. Νόο οι σφαίρες τέμνονται σε κύκλο  $(C)$  του οποίου να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα

Λύση :

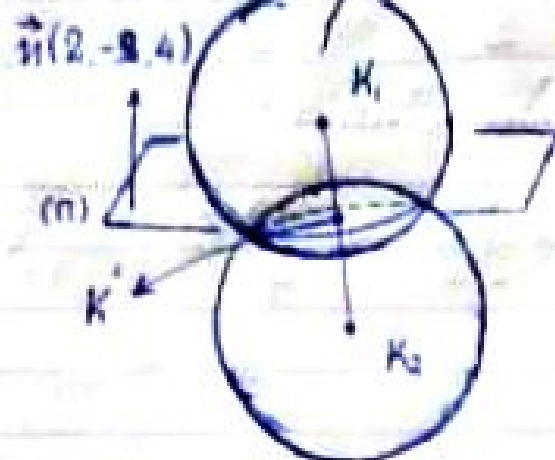
$$\alpha. \quad 0 = x^2 - 2x + 1 - 1 + y^2 - 4y + 4 - 4 + z^2 + 2z + 1 - 1 \rightarrow \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 6$$

$$\text{Άρα } K_1(1, 2, -1) \text{ και } R_1 = \sqrt{6}$$

$$\text{Επίσης } x^2 + y^2 - 6y + 9 - 9 + z^2 + 6z + 9 - 9 + 17 = 0 \rightarrow \\ (x-0)^2 + (y-3)^2 + (z+3)^2 = 1$$

$$\text{Άρα } K_2(0, 3, -3) \text{ και } R_2 = 1$$

β.



Για να τέμνονται σε κύκλο  
θα πρέπει :

$$\| \vec{K_1 K_2} \| < R_1 + R_2$$

Είναι :  $R_1 + R_2 = \sqrt{6} + 1$  και  
και  $\| \vec{K_1 K_2} \| = \sqrt{6}$

Άρα  $\| \vec{K_1 K_2} \| < R_1 + R_2 \rightarrow$   
 $\sqrt{6} < \sqrt{6} + 1$  . άρα  
τέμνονται

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 2z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 6y + 6z + 17 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 2z = 0 \\ 2x - 2y + 4z + 17 = 0 \end{cases} \text{ : επίπεδο στο οποίο βρίσκεται} \\ \text{ο κύκλος}$$

Το κέντρο  $K'$  του (C) δίνεται ως η τομή της  
ευθείας που διέρχεται από το  $K_2$  και τέμνει  
καθότα το επίπεδο  $(n) : 2x - 2y + 4z + 17 = 0$

Έχουμε :  $l(t) = (1, 2, -1) + t \cdot (2, -2, 4)$   
 $= (1 + 2t, 2 - 2t, -1 + 4t)$

Για να τέμνει η ευθεία το επίπεδο θα πρέπει :

$$2(1 + 2t) - 2(2 - 2t) + 4(-1 + 4t) + 17 = 0 \Rightarrow$$

$$t = -\frac{11}{24}$$

Άρα  $K' \left( \frac{1}{12}, \frac{35}{12}, -\frac{34}{12} \right)$

Από Πυθαγόρειο Θεώρημα η ακτίνα  $r$  του (C)

$$\text{είναι: } r = \sqrt{R_1^2 - \|K_1 K'\|^2} = \sqrt{6 - 6 \cdot \frac{121}{144}} = \frac{\sqrt{6} \sqrt{23}}{12}$$

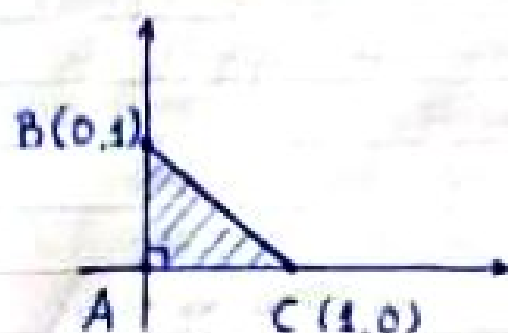
Θέμα 1 [31/01/2019]:

Δίνεται τρίγωνο  $T$  του  $\mathbb{R}^2$  με κορυφές τα σημεία  $A(0,0)$ ,  $B(0,1)$ ,  $C(1,0)$

α. Νβρ. τα μήκη των πλευρών, οι γωνίες και το εμβαδόν του  $T$ .

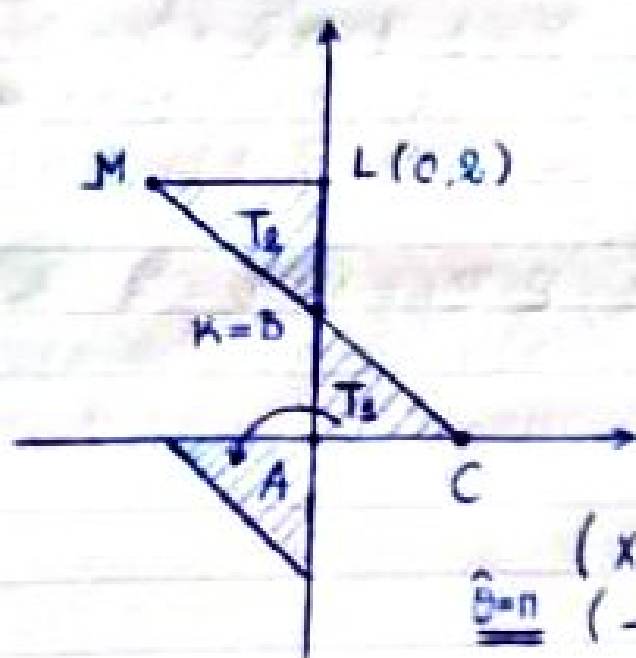
β. Νβρ. ισομετρία του  $\mathbb{R}^2$  που μετασχηματίζει το τρίγωνο  $T$  στο τρίγωνο με κορυφές:  $K(0,1)$ ,  $L(0,2)$ ,  $M(-1,2)$

Λύση:



$$\|AB\| = 1, \|AC\| = 1, \|BC\| = \sqrt{2}$$

$$\hat{A} = \pi/2, \quad \hat{C} = \hat{B} = \pi/4$$



$$T_2 = \varphi(T_1), \text{ όπου:}$$

$$\varphi = \varphi_2 \circ \varphi_1, \text{ όπου:}$$

$\varphi_2$ : εστιαση κατά γωνία  $\pi$   
και  $\varphi_1$ : μεταφορά στη  
διεύθυνση  $\vec{v} = (0,2)$

$$\varphi_2(x,y) =$$

$$(x \cos \theta + y \sin \theta, -x \sin \theta + y \cos \theta)$$

$$\underline{\underline{\hat{\theta} = \pi}} \quad (-x, -y)$$

$$Q_1(x, y) = (x, y+2)$$

Apa  $Q(x, y) = (-x, -y+2)$ .